УДК 330.43

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО STS-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ФОНДОВЫХ ИНДЕКСОВ

О.А. Бельснер, О.Л. Крицкий

Томский политехнический университет
E-mail: olegkol@mph.phtd.tpu.edu.ru

Рассмотрен модифицированный метод STS-GARCH(1,1). Модификация заключалась в отказе от предположения о нормальном законе распределения логарифмов дневных приращений временного ряда и в использовании для их описания Smoothly Truncated a-Stable (STS)-распределения (гладко усеченного a-устойчивого). Параметры метода найдены методом максимального правдоподобия. Проведено статистическое исследование надежности предложенного алгоритма и показано уменьшение автокорреляции в структуре данных, использованных для анализа. Метод применен для прогнозирования цен акций РАО ЕЭС РТС с лагом 5.

1. Введение

Изучение свойств, вычисление параметров и определение вида распределения некоторого стохастического процесса, лежащего в основе рыночных флуктуаций, является центральной задачей эконометрики. Знание распределения необходимо при конструировании эконометрических методов (ARCH, GARCH, EGARCH, FIGARCH, FIEGARCH и др., подробнее о методах см. [1]), при оценке предельной величины риска VAR, при расчетах вероятных в будущем значений временных рядов и при определении асимптотического поведения плотностей функций распределений. Последнее особенно важно, так как редкие события, определяющие форму и вид их хвостов, соответствуют получению наибольшей возможной прибыли или несению наибольшего вероятного убытка.

В преобладающем большинстве случаев логарифмы дневных приращений котировок финансовых инструментов (акций, облигаций, свопов, опционов и т. п.) не имеют нормального распределения [2–4]. Это связано с тем, что у эмпирической функции плотности распределения, построенной на основе таких логарифмов, существует ненулевой эксцесс и асимметрия, присутствует вытянутость функции плотности в ε-окрестности точки математического ожидания, а также наблюдаются так называемые «толстые хвосты», когда вероятность значительных изменений цен выше, чем для нормального распределения. Все эти факторы усложняют или делают невозможным применение известных эконометрических методов: ARCH(p), GARCH(p,q) и др., которые изначально были построены на допущении о нормальном распределении приращений и остатков.

Неудовлетворенность практических участников финансового рынка результатами, полученными на основе нормального приближения, заставила исследователей искать новые распределения и разрабатывать новые подходы для обработки эмпирических финансовых данных. Так, в работах [5–7] для описания временных рядов было использовано обобщенное распределение Парето, в [8, 9] – обобщенное t-распределение Стьюдента, в [3] – распределение Лапласа, в [10] – α-устойчивое распределение. Однако в настоящее время все большее развитие получает идея комбинирования вышеперечисленных распределений с нормальным (см., например, [11]). Идея заключается в отсечении хвостов исходной функции плотности и в замене их на хвосты нормального распределения.

В данной работе рассматривается модифицированная модель GARCH(1,1). Модификация заключалась в отказе от предположения о нормальном законе распределения логарифмов дневных приращений временного ряда и в использовании для их описания Smoothly Truncated α-Stable (STS)-распределения [11]. Построение STS-распределения осуществляется нахождением параметров нормальных распределений, формирующих хвосты, и вычислением первого и второго начальных моментов. Эффективность предложенной модификации STS-GARCH(1,1) показана с помощью имитационного моделирования цен акций РАО ЕЭС РТС. При этом было использовано 371 значение долларовых котировок за период с 4 января 2003 г. по 30 июня 2004 г. (данные предоставлены компанией РТС, http://www.rts.ru).

2. Общие положения

Рассмотрим классический метод GARCH(1,1) [12]. Пусть h_n, n=1,2,..., – некоторый временной ряд. Допустим, что справедлива авторегрессионая зависимость:

$$\bar{\sigma}_n^2 = \gamma V + \bar{\alpha} u_{n-1}^2 + \bar{\beta}\bar{\sigma}_{n-1}^2 = \omega + \bar{\alpha} u_{n-1}^2 + \bar{\beta}\bar{\sigma}_{n-1}^2, \quad (1)$$

где $\gamma>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ – некоторые коэффициенты модели, $V>0$ – долговременное среднее отклонение в структуре данных, $\gamma+\bar{\alpha}+\bar{\beta}=1$, $\omega=\gamma V$, $u_n=\ln(h_n)-\ln(h_{n-1})$ – логарифмы приращений значений временного ряда h_n, $\bar{\sigma}_n$ – дневная волатильность, n=1,2,...

Вместо $u_n=\ln(h_n)-\ln(h_{n-1})$ можно использовать, например, оценку $u_n=\ln(h_n-h_{n-1})h_{n-1}^{-1}$. В обоих случаях u_n будут зависимыми случайными величинами. Поэтому для u_n потребуем существования по крайней мере двух первых условных начальных и центральных моментов. Для корректного вычисления последних предположим, что на вероятностном пространстве (Ω,F,P), где F – σ-алгебра под-

множеств Ω, задана фильтрация $F=(F_n)_{n\geq 0}$, состоящая из σ-подалгебр F_n таких, что $F_m\subset F_n\subset F$, если $m\leq n$. При этом события из F_n будем интерпретировать как доступную на момент времени $(n-1)$ информацию.

Пусть далее $E(u_i|F_{i-1})=\overline{a}_i$ и $D(u_i|F_{i-1})=\overline{\sigma}_i^2=E(u_i^2|F_{i-1})-\overline{a}_i^2$, i=1,2,... Если предположить, что $u_n\sim N(a_n,\sigma_n)$, то в соответствии с методологией GARCH(1,1) выполнено соотношение:

$$u_n=\overline{\sigma}_n\varepsilon_n+\overline{a}_n,\; n=0,1,2,..., \quad (2)$$

где $\varepsilon_n\sim N(0,1)$ – стандартная нормальная случайная величина. Это позволяет производить имитационное моделирование будущих значений временного ряда h_n по вычисленным согласно (1) волатильностям σ_{n+1}:

$$\ln(h_{n+1})=\ln(h_n)+\overline{\sigma}_{n+1}\varepsilon_{n+1}+\overline{a}_{n+1},\; n=0,1,2,...$$

Однако в произвольном случае, если закон распределения u_n неизвестен, использовать формулу (2) затруднительно. Построим для u_n функцию распределения, предположив, что она относится к классу STS-распределений с некоторыми параметрами.

Определение. Пусть

$$g_\theta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i\,x(\mu-t)]\times$$
$$\times\exp\left(-|c\cdot t|^\alpha\left(1-\beta\cdot i\cdot\operatorname{sign}(t)\cdot tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right)dt$$

– функция плотности α-устойчивого распределения с вектором параметров (α, β, c, μ), где α – характеристическая экспонента, β – коэффициент асимметрии, c – масштаб, μ – среднее. Пусть $h_1(x)$, $h_2(x)$ – плотности нормального распределения с параметрами (a_i,σ_i^2), i=1,2. Пусть выбраны два действительных числа a, b, причем $a<\mu<b$, и выполнены соотношения:

$$h_1(a)=g_\theta(a),\; h_2(b)=g_\theta(b),$$
$$\int_{-\infty}^{a}h_1(x)dx=\int_{-\infty}^{a}g_\theta(x)dx,\;\int_{b}^{\infty}h_2(x)dx=\int_{b}^{\infty}g_\theta(x)dx. \quad (3)$$

Назовем плотностью STS-распределения функцию $f(x)$ вида:

$$f(x)=\begin{cases}h_1(x), x<a;\\ g_\theta(x), x\in[a,b];\\ h_2(x), x>b.\end{cases} \quad (4)$$

Математические ожидания и дисперсии (a_i,σ_i^2), i=1,2 однозначно определяются из равенств (3). Поэтому $S(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=S(x,a,b,\alpha,\beta,c,\mu)$ будет зависеть от шести параметров: a, b, α, β, c, μ. Различные возможные параметризации рассмотрены в монографии [13], где обсуждаются их преимущества и недостатки.

Обозначим через p_1 и p_2 вероятности отсечения:

$$p_1=\int_{-\infty}^{a}h_1(t)\,dt;\; p_2=\int_{b}^{\infty}h_2(t)\,dt.$$

Для определения p_1 и p_2 необходимо пользоваться квадратурной формулой и вычислять соответственно интегралы $\int_{-\infty}^{a}g_\theta(x)dx$, $\int_{b}^{\infty}g_\theta(x)dx$.

Вероятности p_1 и p_2 играют важную роль при детерминации параметров нормальных распределений с плотностями $h_1(x)$, $h_2(x)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $S(x,a,b,\alpha,\beta,c,\mu)$ – функция STS-распределения с плотностью $f(x)$, удовлетворяющей (4). Тогда параметры нормальных распределений с плотностями $h_1(x)$, $h_2(x)$ вычисляются по формулам:

$$\sigma_1=\varphi(\Phi^{-1}(p_1))\cdot[g_\theta(a)]^{-1},$$
$$\sigma_2=\varphi(\Phi^{-1}(p_2))\cdot[g_\theta(b)]^{-1},$$
$$a_1=a-\sigma_1\Phi^{-1}(p_1),\; a_2=b+\sigma_2\Phi^{-1}(p_2), \quad (5)$$

где $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ – плотность и функция распределения стандартной нормальной случайной величины соответственно.

Доказательство теоремы основано на использовании равенств (3) и выполнении соотношений:

$$p_1=\int_{-\infty}^{a}h_1(t)dt=\Phi\left(\frac{a-a_1}{\sigma_1}\right);$$
$$p_2=\int_{b}^{\infty}h_2(t)dt=1-\Phi\left(\frac{b-a_2}{\sigma_2}\right).$$

Для задания в (2) стандартной STS-распределенной случайной величины ε_n требуется знать первый и второй начальные моменты. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\xi\sim S(x,a,b,\alpha,\beta,c,\mu)$. Тогда первый и второй начальный моменты вычисляются по формулам:

$$E\xi=ap_1-\sigma_1[\Phi^{-1}(p_1)p_1+\varphi(\Phi^{-1}(p_1))]+$$
$$+\int_{a}^{b}xg_\theta(x)\,dx+bp_2+\sigma_2[\Phi^{-1}(p_2)p_2+\varphi(\Phi^{-1}(p_2))],$$
$$E\xi^2=(\sigma_1^2+a_1^2)-\sigma_1(a+a_1)\varphi(\Phi^{-1}(p_1))+$$
$$+\int_{a}^{b}x^2g_\theta(x)\,dx+(\sigma_2^2+a_2^2)p_2+\sigma_2(a_2+b)\varphi(\Phi^{-1}(p_2)).$$

Доказательство теоремы основано на непосредственном интегрировании равенства (4).

Проведем сравнение построенной по (3)–(5) плотности STS-распределения с плотностями нормального и α-устойчивого распределения с идентичными параметрами, для чего изобразим их на рис. 1.

Как следует из анализа рис. 1, плотности α-устойчивого и STS-распределений совпадают друг с другом при $x\in[a,b]$. Кривая 2 отличается от

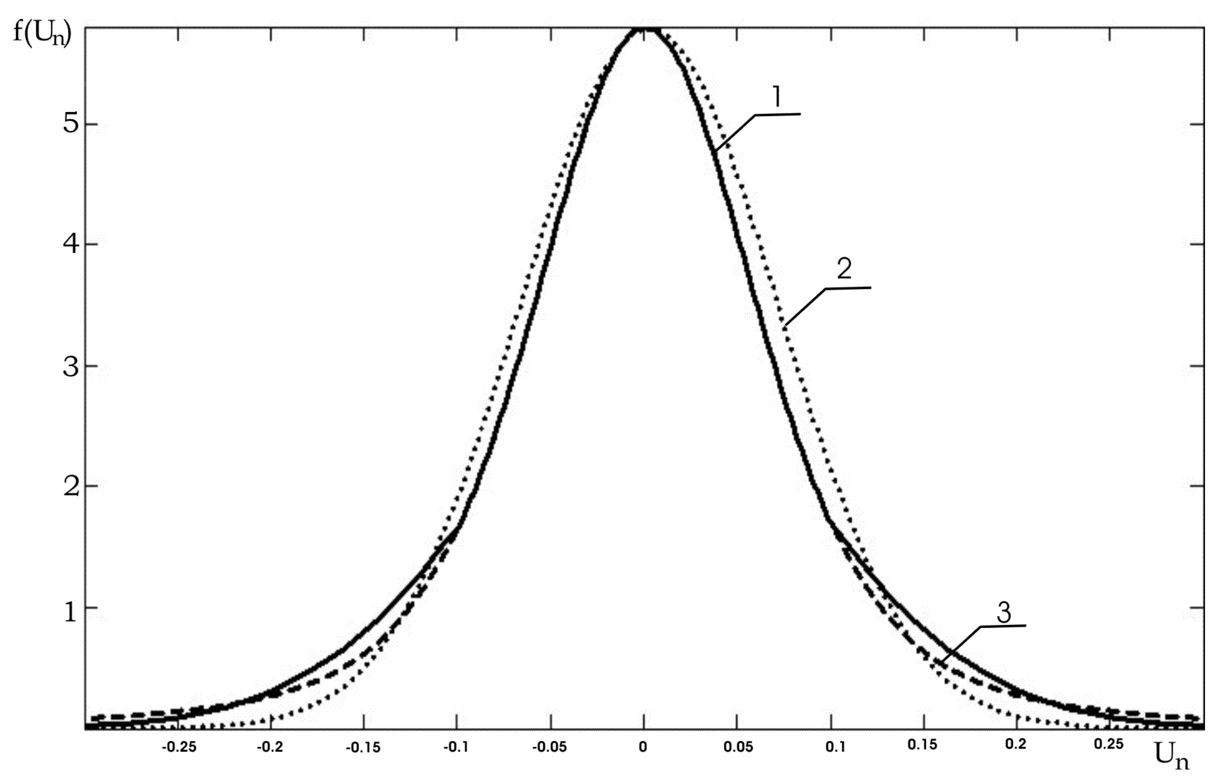


Рис. 1. *Плотности нормального, α-устойчивого и STS-распределения при $a=-0,1$, $b=0,1$ ($p_1=p_2=0,105$), $\alpha=1,5$, $\beta=0,1135$, $c=0,05$, $\mu=0,00191$: 1) плотность STS-распределения; 2) плотность нормального распределения с математическим ожиданием $\mu=0,00191$ и дисперсией 0,004761; 3) плотность α-устойчивого распределения*

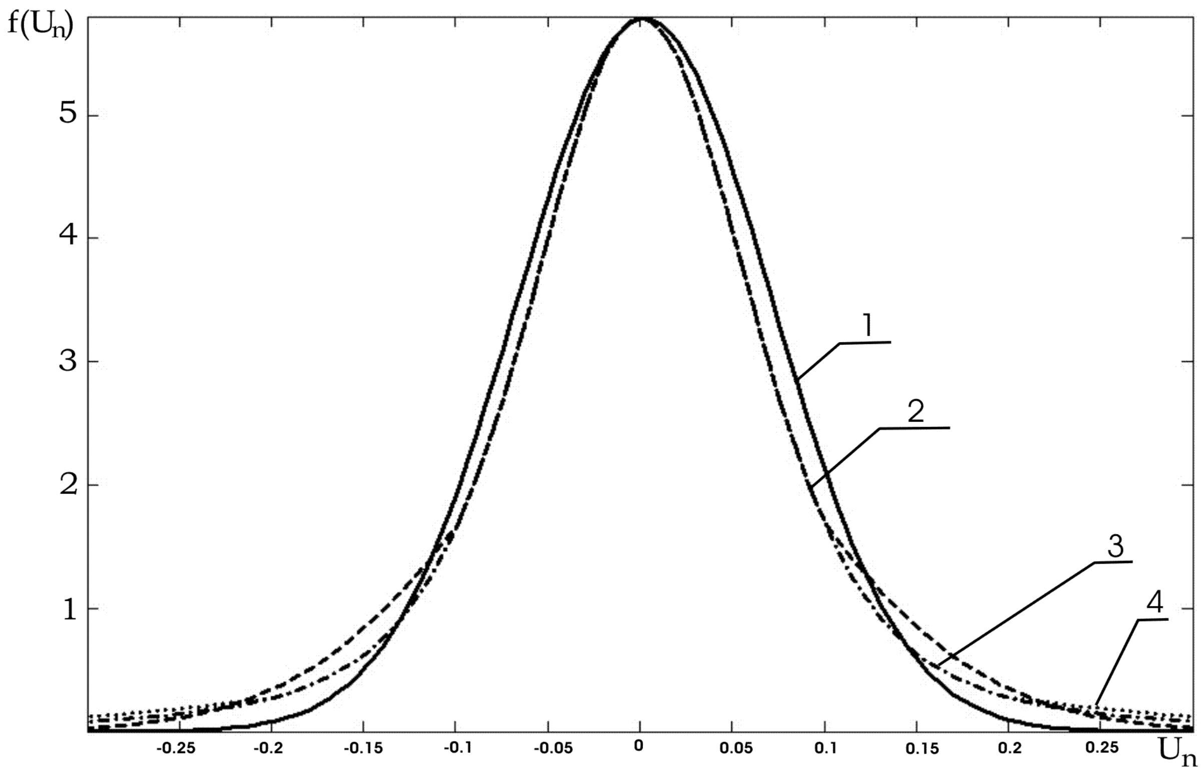


Рис. 2. *Плотности STS-распределения при $\alpha=1,5$, $\beta=0,1135$, $c=0,05$, $\mu=0,00191$ и функция плотности нормального распределения с математическим ожиданием μ и дисперсией 0,00476: 1) плотность нормального вероятностного закона; 2) плотность STS-распределения при $a=-0,1$, $b=0,1$, $p_1=p_2=0,105$; 3) плотность STS при $a=-0,2$, $b=0,2$, $p_1=p_2=0,031$; 4) плотность STS-распределения при $a=-0,3$, $b=0,3$, $p_1=p_2=0,015$*

кривых 1, 3 вследствие ненулевого коэффициента асимметрии β. Кроме того, характеристическая экспонента α не равна двум (случай нормального вероятностного закона). Далее, для $x>\max\{|a|,|b|\}$ хвосты кривой 1 находятся между кривыми 2 и 3. Это говорит о том, что редкие события при их описании с помощью STS-распределения происходят с более высокой вероятностью, чем при использовании нормального закона.

Зависимость плотности STS-распределения от параметров a, b приведена на рис. 2. Как следует из анализа рис. 2, с ростом абсолютного значения уровня отсечения a толщина хвостов падает, а функция плотности концентрирует свои значения около моды μ. Кроме того, при определенных значениях параметров плотность STS-распределения может иметь более толстые хвосты, чем плотности нормального и α-устойчивого распределений. Поэтому можно утверждать, что построенная в соответствии с (3)–(5) функция $f(x)$ обладает высокой адаптивной способностью к описанию эмпирических данных, достигаемой варьированием шести параметров.

3. Эконометрический анализ данных

Используем построенное выше STS-распределение для модификации GARCH(1,1). Предположим, что в выражении (1) $u_n\sim S(x,a,b,\alpha,\beta,c,\mu)$. Выберем стандартную STS-распределенную случайную величину $\varepsilon_n\sim S(x;-5{,}92;3{,}33;1{,}85;0{,}6;-0{,}1;0)$, имеющую нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию.

Предполагая независимость логарифмических приращений, применим для оценивания коэффициентов $\gamma,\overline{\alpha},\overline{\beta}$ модели (1) метод максимального правдоподобия (вопросы применимости метода в случае условных плотностей подробно рассмотрены в [14]) и вычислим максимум функции L:

$$L=\prod_{i=1}^{m} f_i,$$

или функции $\ln L$:

$$\ln L=\sum_{i=1}^{m} f_i, \qquad (6)$$

где $f_i=f(x_i|F_{i-1})$ – функции условной плотности STS-распределения, определенные равенством (4), m – число наблюдений, L – функция правдоподобия.

Поиск максимума (6) осуществляется в соответствии с выполнением необходимого условия существования экстремума функции трех переменных:

$$\frac{\partial L}{\partial\omega}=0,\ \frac{\partial L}{\partial\overline{\alpha}}=0,\ \frac{\partial L}{\partial\overline{\beta}}=0. \qquad (7)$$

Решение нелинейной системы (7) в предположении единственности экстремума в некоторой расчетной области может проводиться любым итерационным методом: методом наискорейшего спуска, сопряженных градиентов и т. п.

После оценивания коэффициентов $\omega,\overline{\alpha},\overline{\beta}$ и подстановки их в (1) остается провести статистическое исследование надежности предложенного метода GARCH(1,1) при прогнозировании волатильности. Для этого используем хорошо известную статистику Льюнга–Бокса проверки гипотезы H_0 о равенстве нулю первых m автокорреляций [15], где $m<n$. Так как при условии существования четвертого начального момента $E|u_n|<\infty$ процесс GARCH(1,1) может быть записан в виде ARMA процесса с параметрами $p=1$ и $q=1$, то естественно рассмотреть нормированную выборочную автокорреляционную функцию остатков $\hat{a}_n$ вида

$$\hat{r}_k=\sum_{i=1}^{n-k}\hat{a}_i\,\hat{a}_{i+k}\Big/\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i^2,\ k=1,2,3,\ldots$$

Далее, запишем статистику

$$\overline{\gamma}=n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{r}_k^2}{n-k},$$

которая, как известно, при достаточно больших n будет иметь χ^2-распределение с $(m-p-q)$ степенями свободы, если теоретические значения параметров модели (1) неизвестны. Наконец, вычисление $\hat{r}_k$ следует проводить для остатков $\hat{a}_n=u_n^2$ и $\hat{a}_n=(u_n-\overline{a})/\overline{\sigma}_n^2$ соответственно до и после применения GARCH(1,1).

Гипотеза H_0 принимается, если $\overline{\gamma}<\chi^2_{1-s}(m-p-q)$, где s – уровень значимости критерия, и отвергается в противном случае. Соответственно, GARCH(1,1), определяемый выражением (1) с коэффициентами, удовлетворяющими (7), является статистически надежным с уровнем значимости s, если $\overline{\gamma}<\chi^2_{1-s}(m-p-q)$.

Для моделирования вероятных в будущем значений временного ряда h_n вместе с вычислением статистики Льюнга–Бокса потребуется проверить, будут ли приращения u_n, найденные в соответствии с (2), иметь STS-распределение. Подгонка эмпирического распределения к STS по выборочным данным может осуществляться различными методами, например, подгонкой характеристической функции или аппроксимацией плотности с использованием быстрого преобразования Фурье. В данной работе использовалась запись плотности STS-распределения через интеграл Золотарева [13] с его последующим численным интегрированием квадратурной формулой Симпсона. Качество подгонки проверялось с помощью χ^2-теста [14].

4. Анализ эмпирических данных

Применим метод STS-GARCH(1,1) для моделирования временного ряда h_n долларовых котировок акций РАО ЕЭС РТС, для чего используем 371 значение за период с 04 января 2003 г. по 30 июня 2004 г.

Отметим, что $u_n=\ln(h_n)-\ln(h_{n-1})$, $n=1,2,\ldots$, обладают следующими параметрами: среднее – $1{,}9\cdot10^{-3}$, дисперсия – $8{,}2\cdot10^{-4}$, третий центральный момент – $2{,}6\cdot10^{-6}$, четвертый – $4{,}1\cdot10^{-6}$, коэффициент асимметрии – $1{,}1\cdot10^{-1}$, куртосис (эксцесс) – 6,15.

Проведенные численные расчеты показали, что $u_n \sim S(x,a,b,\alpha,\beta,c,\mu)$ с вероятностью 0,99, причем $a=-4\cdot10^{-2}$, $b=4{,}5\cdot10^{-2}$, $\alpha=1{,}9$; $\beta=1{,}1\cdot10^{-1}$, $c=1{,}8\cdot10^{-2}$, $\mu=1{,}9\cdot10^{-3}$. При этом значение χ^2-теста было равно 21,67.

Дневная волатильность σ_n в (1) вычислялась по последним k наблюдениям:

$$\bar{\sigma}_n^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(u_{n-i} - \bar{u})^2,$$

где $\bar{u} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} u_{n-i}$ – выборочное среднее, k – лаг (задержка) временного ряда. Коэффициенты модели (1) были оценены методом максимального правдоподобия с логарифмической функцией правдоподобия (6). Система (7) разрешалась методом наискорейшего спуска с погрешностью $\varepsilon=10^{-3}$. Начальное приближение выбиралось нулевым.

Величины параметров STS-GARCH(1,1) при различных лагах k приведены в таблице.

Таблица. *Значения коэффициентов STS-GARCH (1,1) при различных лагах*

k	ω	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	γ	V
2	10^{-4}	0,20	0,77	0,03	$3\cdot10^{-2}$
5	10^{-4}	0,21	0,78	10^{-2}	10^{-2}
10	10^{-3}	0,16	0,83	10^{-2}	10^{-1}

Приведем значения статистики Льюнга–Бокса $\bar{\gamma}$ до и после применения GARCH(1,1). Так, при $k=3$ до и после применения она была равна 29,58 и 0,09 соответственно, при $k=5$ – 48,6 и 1,11, при $k=10$ – 60,13 и 6,78. Пороговые значения распределения $\chi^2_{1-s}(m-2)$ при уровне значимости $s=0{,}05$ и $m=3$, $m=5$, $m=10$ равны 3,8414; 7,8147; 15,5073. Таким образом, метод STS-GARCH(1,1), построенный на основе (1) с коэффициентами из таблицы, является статистически надежным с вероятностью 0,95.

Применим STS-GARCH(1,1) для имитационного моделирования долларовых котировок акций РАО ЕЭС РТС. При этом используем найденные ранее волатильности σ_n и сгенерируем случайную последовательность $\varepsilon_n=\{y_n\}_{n=0}^{370}$, имеющую STS-распределение с нулевым средним и дисперсией единица:

$$\varepsilon_n \sim S(x; -5{,}92;\ 3{,}33; 1{,}85;\ 0{,}6;\ -0{,}1;\ 0).$$

Задание значений ε_n проводилось согласно классической схеме [17]: на интервале [0,1] генерировалась последовательность равномерно распределенных случайных величин $\{x_n\}_{n=0}^{370}$, после чего при фиксированном n решалось трансцендентное уравнение относительно y_n:

$$x_n = S(y_n), \qquad (8)$$

где $S(y) = S(y; -5{,}92; 3{,}33; 1{,}85; 0{,}6; -0{,}1; 0) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt$ – функция стандартного STS-распределения. Решение уравнения (8) осуществлялось методом касательных с нулевым начальным приближением и точностью 10^{-4}. Относительная погрешность вычисления корней (8) не превосходила 10^{-6}.

Последовательность ε_n была использована в (2) для определения логарифмов приращений u_n и для вычисления вероятных значений h_{n+1}^{STS} долларовых котировок акций РАО ЕЭС РТС:

$$h_{n+1}^{STS} = h_n \cdot \exp(\bar{\sigma}_{n+1}\varepsilon_{n+1} + \bar{a}_{n+1}).$$

Полученные h_n^{STS}, рассчитанные с лагом 5, и исходные исторические данные h_n приведены на рис. 3. Кроме того, на рис. 3 изображена относительная погрешность δ_n между ними:

$$\delta_n = \left|h_n^{STS} - h_n\right| h_n^{-1}.$$

Как следует из анализа рис. 3, относительная погрешность δ_n не превосходила 5 %. Максимум δ_n достигался на 206 день торгов и был равен 4,8 %. Средняя величина погрешности составила 2,28 %.

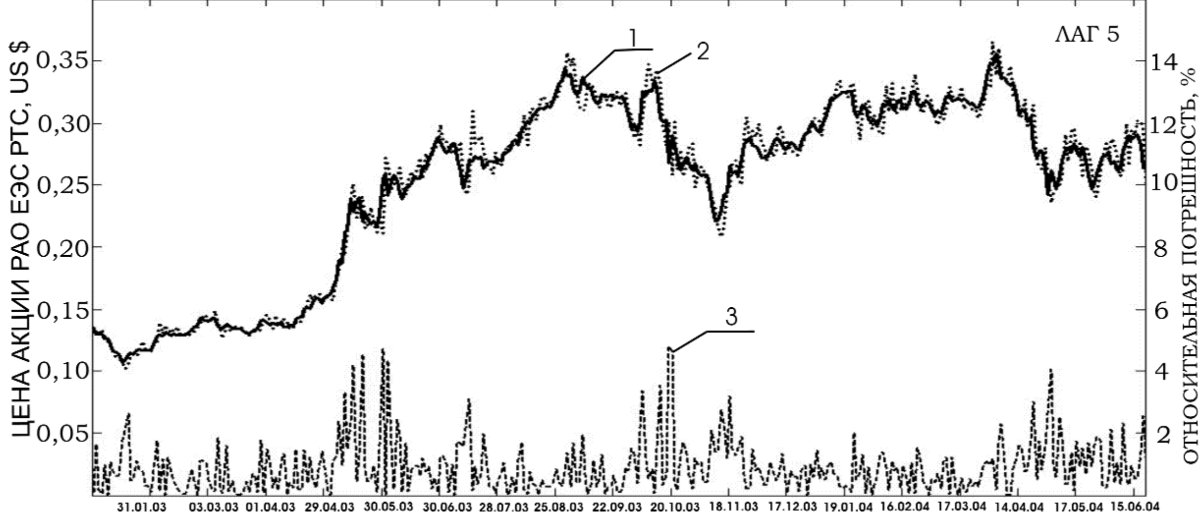


Рис. 3. *Сравнение исторических и модельных значений котировок акций РАО ЕЭС РТС за период с 04 января 2003 г. по 30 июня 2004 г.: 1) временной ряд исторических данных, 2) временной ряд, рассчитанный STS-GARCH(1,1) с лагом 5, 3) относительная погрешность, %*

Согласно рис. 3, наблюдаются три всплеска значений δ_n: с 29.04.03 по 30.05.03, 20.10.03 и с 14.04.04 по 17.05.04. Это связано с резкими скачками котировок акций в данные промежутки времени, так как волатильность цен составляла от 7 до 15 % в день. Отметим, что такие резкие изменения цен являются одной из причин отказа от допущения о нормальном распределении ε_n при вычислении u_n в выражении (2). Как показывают расчеты, если вместо $\varepsilon_n \sim S(x;-5{,}92;3{,}33;1{,}85;0{,}6;-0{,}1;0)$ взять $\varepsilon_n \sim N(0{,}1)$, то максимум относительной погрешности будет равен 17,1 % при средней величине погрешности 7,3 %. Вышесказанное дает основание сделать вывод о том, что STS-GARCH(1,1) удовлетворительно описывает исходные данные и позволяет моделировать их значения с небольшой погрешностью.

5. Заключение

На основе одномерного STS-распределения построен модифицированный эконометрический метод STS-GARCH(1,1). Найдены аналитические выражения для первого и второго начальных моментов STS-распределения. Неизвестные параметры модели STS-GARCH(1,1) определены численно методом максимального правдоподобия. С помощью теста Льюнга–Бокса осуществлено статистическое исследование надежности предложенного эконометрического алгоритма. Далее, метод STS-GARCH(1,1) был применен для имитационного моделирования цен обыкновенных акций РАО ЕЭС РТС с лагом 5. Показана более высокая точность вычислений по сравнению с классической моделью GARCH(1,1), в которой делается допущение о нормальности логарифмов дневных приращений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ser-Huang P. A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility. – Chichester: John Wiley & Sons, 2005. – 123 p.
2. Fama E. The behavior of stock market prices // Journal of Business. – 1965. – V. 38. – № 1. – P. 34–105.
3. Haas M., Mittnik S., Paolella M.S. Modeling and Predicting Market Risk With Laplace-Gaussian Mixture Distributions // Center for Financial Studies (J.W. Goethe University), 2005. – № 11. – P. 36.
4. Mantegna R.N., Stanley H.E. Introduction to Econophysics, Correlations and Complexity in Finance. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 148 p.
5. Basrak B., Davis R.A., Mikosch T. Regular variation of GARCH processes // Stochastic Processes and their Applications. – 2002. – V. 99. – P. 95–115.
6. Brooks C., Clare A.D. a. o. A comparison of extreme value theory approaches for determining value at risk // Journal of Empirical Finance. – 2005. – № 12. – P. 339–352.
7. Mittnik S., Paolella M.S., Rachev S.T. Stationarity of stable power-GARCH processes // Journal of Econometrics. – 2002. – V. 106. – P. 97–107.
8. Jondeau E., Rockinger M. Conditional volatility, skewness, and kurtosis: existence, persistence, and comovements // Journal of Economic Dynamics and Control. – 2003. – V. 27. – P. 1699–1737.
9. Wagner N., Marsh T.A. Measuring tail thickness under GARCH and an application to extreme exchange rate changes // Journal of Empirical Finance. – 2005. – V. 12. – P. 165–185.
10. Menn C., Rachev S.T. A GARCH option pricing model with alpha-stable innovations // European Journal of Operational Research. – 2005. – V. 163. – P. 201–209.
11. Rachev S.T., Menn C., Fabozzi F.J. Fat-tailed and Skewed Asset Return Distribution. Implications for Risk Management, Portfolio Selection and Option Pricing – John Wiley & Sons, 2005. – 370 p.
12. Hull J. Options, futures and other derivatives – Prentice-Hall, 2002. – 745 p.
13. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983 – 304 с.
14. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика. Основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001 – Т. 1. – 656 с.
15. Ljung G.M., Box G.E.P. On a measure of lack of fit in time series models // Biometrika. – 1978. – V. 65. – № 2. – P. 297–303.
16. Chernobai A., Rachev S.T., Fabozzi F. Composite Goodness-of-Fit Tests for Left-Truncated Loss // Samples Technical Report: Department of Statistics and Applied Probability, University of California, USA, 2005. – 23 p. http: // www.pstat.ucsb.edu/research/papers/KSmissing20050604-JFE.pdf
17. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1960. – 661 с.